FINANČNÍ A POJISTNÁ MATEMATIKA

Vysoká škola ekonomie a managementu
2024

Finanční a pojistná matematika

Seznam autorů:
doc. Ing. Pavla Vrabcová, Ph.D.

Vydání druhé, aktualizované.
ISBN: 978-80-88502-70-8

Vysoká škola ekonomie a managementu
www.vsem.cz

Obsah

Seznam zkratek

30E/360 – německý standard
ACT/360 – francouzský standard
ACT/365 – anglický standard
AÚV – alikvótní úrokový výnos
bp – bazický bod
BP – brutto pojistné
BÚ – běžný účet
CP – cenný papír
D – durace
FV – budoucí hodnota (Future Value)
IRR – vnitřní míra výnosnosti (Internal Rate of Return)
KSN – kalkulované správní náklady
KÚ – kontokorentní účet
KZ – kalkulovaný zisk
NOZ – nový občanský zákoník
NP – netto pojistné
NPV – metoda čisté současné hodnoty (Net Present Value)
NU – pohotovostní provize
NÚM – nominální úroková míra
p. a. – per annum (ročně)
PPČ – průměrná pojistná částka
PPP – průměrné pojistné plnění
PR – provize za překročení úvěrového rámce
PS – pojistná sazba
PŠ – průměrná škoda
PV – současná hodnota (Present Value)
RPSN – roční procentní sazba nákladů
ŠF – škodní frekvence
ŠP – škodní průběh
ŠS – škodní sazba
ŠSt – škodní stupeň
UC – úrokové číslo
UD – úrokový dělitel
UR – úvěrový rámec
ZOK – zákon o obchodních korporacích

Seznam obrázků a grafů

Seznam tabulek

Značky a symboly v učebním textu

Struktura distančních učebních textů je rozdílná již na první pohled, a to např. v zařazování grafických symbolů – značek.

Specifické grafické značky umístěné na okraji stránky upozorňují na definice, cvičení, příklady s postupem řešení, klíčová slova a shrnutí kapitol. Značky by měly studenta intuitivně vést tak, aby se již po krátkém seznámení s distanční učebnicí dokázal v textu rychle a snadno orientovat.

Definice

Upozorňuje na definici nebo poučku pro dané téma.

Příklad

Označuje příklad praktické aplikace učiva včetně řešení.

Otázky k procvičení a úkoly

Označuje otázky a úkoly s postupem řešení na konci kapitoly.

Klíčová slova

Upozorňuje na důležité výrazy či odborné termíny nezbytné pro orientaci v daném tématu.

Shrnutí kapitoly

Shrnutí kapitoly se zařazuje na konec dané kapitoly. Přehledně, ve strukturovaných bodech shrnuje to nejpodstatnější z předchozího textu.

Předmluva

Matematické operace, které se aplikují ve finanční sféře, lze nazvat finanční matematikou. Dle zkušeností autorky vyvolává slovo matematika u studentů určitou nechuť. Ta je však způsobena tím, že si studenti nedovedou pod jednotlivými pojmy představit nic konkrétního. Studia finanční a pojistné matematiky se není zapotřebí obávat, základy lze zvládnout se znalostí středoškolské matematiky. Snahou autorky je postupovat od věcí jednoduchých ke složitějším při zachování jednotlivých návazností.

S termíny ve finanční a v pojistné matematice se lze setkat v každodenním životě při řešení otázek typu: jak nejlépe uložit peníze, do čeho investovat, případně jak zhodnotit své finanční prostředky. Ambicí tohoto učebního textu je tyto příklady a pojmy prakticky vysvětlovat a zároveň vždy aplikovat. Naopak si neklade za cíl rozvíjet finanční a pojistnou matematiku jako vědeckou disciplínu.

Skripta Finanční a pojistná matematika jsou doplněna příklady a úlohami z praxe v řízení privátních, bankovních a korporátních financí. Učební text je tedy strukturován tak, aby studenti po přečtení jednotlivých kapitol testovali a prokazovali své znalosti na zadaných úlohách a zkouškových testech nebo na příkladech z praxe. Prostřednictvím klíčových slov (uvedených vždy na konci každé kapitoly) lze získat přehled o nejdůležitějších odborných termínech v daném tématu. V případě, že si student bude chtít rozšířit své vědomosti, může taktéž využít a studovat citovanou literaturu. V závěru každé kapitoly je rovněž uvedeno shrnutí nejdůležitějších poznatků. Je vhodné, aby studenti v průběhu studia pracovali s některým matematickým softwarem, např. s MS Excelem.

Skripta Finanční a pojistné matematiky jsou rozdělena do 11 kapitol, jež na sebe věcně a logicky navazují. Pro ty, kteří potřebují zopakovat základy matematiky, potřebné ve finanční matematice, je určena úvodní kapitola. Následuje kapitola 2, která spočívá v definování a aplikaci jednoduchého i složeného úročení. V kapitole 3 a 4 studenti získají přehled o modelech opakovaných plateb (spoření a důchody). V kapitole 5 se studenti dozvědí o možnostech umořování úvěrů. Následující kapitoly 6, 7 a 8 jsou věnovány investicím a investičnímu rozhodování, dále je detailněji vysvětlován princip obligací a akcií. Kapitoly 9, 10 a 11 jsou věnovány matematice pojistné. Nejdříve jsou vymezeny základní pojmy pro zajištění pochopení odborné aktuárské terminologie. Následují pojistně-matematické výpočty v životním a neživotním pojištění. V rámci pojistné matematiky se studenti naučí pracovat s úmrtnostními tabulkami a komutačními čísly pro výpočet rizika, pojistného atd.

Po prostudování učebního textu Finanční a pojistná matematika budou studenti mimo jiné:

- rozeznávat a definovat základní pojmy finanční a pojistné matematiky,
- využívat principu úročení u základních problematických oblastí finanční matematiky,
- chápat principy opakovaných plateb (spoření a důchodů),
- schopni aplikovat základní teoretické poznatky z oblasti finanční a pojistné matematiky,
- schopni využívat elementárních postupů finanční a pojistné matematiky.

Závěrem by autorka ráda podotkla, že uvítá jakékoli připomínky, poznámky a názory čtenářů na studijní text.

Autorka děkuje za recenzi a cenné připomínky prof. Ing. Evě Ducháčkové, CSc. a doc. RNDr. Jarmile Radové, Ph.D. V neposlední řadě také děkuje Mgr. Ing. Janu Vrabcovi za odborné konzultace.

V Liberci, 2024

doc. Ing. Pavla Vrabcová, Ph.D.

Finanční matematika

kapitola 1

Základní matematické postupy potřebné ve finanční matematice

1. kapitola

Základní matematické postupy potřebné ve finanční matematice

Úvod

V kapitole 1 jsou uvedeny základní matematické pojmy, které budou studenti přímo nebo v určitých obměnách používat v aplikacích finanční matematiky. Tato kapitola je určena po ty studenty, kteří cítí potřebu zopakovat základy matematiky potřebné pro matematiku finanční.

Ambicí kapitoly 1 je připomenout si některé matematické pojmy a výpočetní postupy užívané ve finančních operacích. V neposlední řadě bude zdůrazněn rozdíl mezi procentem a procentním bodem, poněvadž se studentům často stává, že tyto pojmy neznají, případně je zaměňují.

Cíle kapitoly

- Definovat a zopakovat základní matematické pojmy užívané ve finanční matematice, a to především:
  - procento a procentový počet,
  - procentní bod,
  - bazický bod,
  - aritmetický průměr,
  - geometrický průměr,
  - vybrané typy posloupností.

1.1

Procento a procentový počet

DEFINICE

Procento

Procenta jsou způsobem, jak vyjádřit část celku (setiny, tzn. zlomek) pomocí celého čísla.

Pro 1 procento tedy platí vztah (1.1):

$$1\ \% = \frac{1}{100}. \tag{1.1}$$

Lze konstatovat, že 100 % je jeden celek a celý základ.

Zápis např. „95 %" (95 procent) je ve skutečnosti jenom zkratkou pro zlomek 95/100, tzn. desetinné číslo 0,95. Jméno pochází z „per cento", znamenajícího „na sto". V úlohách s % se objevují tři základní veličiny (Radová et al., 2013):

- základ z (100 %),
- počet procent p (určuje, kolikrát se jedna setina celku „vejde" do jeho části) a
- procentová část ($č$), která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách.

Výpočet procentové části $č$ lze provést následujícím způsobem pomocí přímé úměry (Radová et al., 2013):

$\uparrow$ 100 %..........................z $\uparrow$

p %…………………..$č$

Pro výpočet procentové části platí následující vztah (1.2):

$$č = \frac{zp}{100}. \tag{1.2}$$

Stejným způsobem lze odvodit počet procent p vztahem (1.3):

$$p = \frac{100č}{z}. \tag{1.3}$$

Výpočet základu z je uveden níže (1.4):

$$z = \frac{100č}{p}. \tag{1.4}$$

PŘÍKLAD

Mobilní telefon v prodejně stojí 20 000 Kč, o kolik korun bude levnější po slevě o 25 %?

Řešení:
Nejdříve je nutno identifikovat základ z a počet procent p.

z = 20 000 Kč, p = 25, $č$ = ?

Následně lze dosadit do vztahu (1.2):

$$č = \frac{20\,000 \cdot 25}{100} = 5\,000.$$

Odpověď: Telefon bude levnější o **5 000 Kč**.

PŘÍKLAD

Na spořicí účet s roční úrokovou mírou 1,5 % p. a. je uloženo 150 000 Kč. Jaký bude zůstatek po připsání úroku na konci roku? Kolik zbyde po odečtení 15% daně ze zisku?

Řešení:
Bude postupováno stejným způsobem uvedeným v předchozím příkladu:

z = 150 000 Kč, p = 1,5, $č$ = ?

$$č = \frac{150\ 000 \cdot 1{,}5}{100} = 2\ 250.$$

Zůstatek po připsání úroku na konci roku činí 150 000 + 2 250 = 152 250 Kč.

Pro výpočet daně lze aplikovat následující výpočet (1.2):

$$č = \frac{15 \cdot 2\ 250}{100} = 337{,}5.$$

Pokud je vypočten rozdíl 2 250 – 337,5 = 1 912,5 Kč, lze zjistit kladné čisté úroky na spořicím účtu.

Odpověď: Po odečtení 15% daně bude zůstatek **152 250 Kč** snížen na **151 912,5 Kč**.

PŘÍKLAD

V prodejně zlevnil telefon o 500 Kč, což odpovídá 25 % původní ceny. Jaká byla původní cena telefonu?

Řešení:
V tomto případě není znám základ z: $č$ = 500, p = 25, z = ?
Následně lze dosadit do vztahu (1.4):

$$z = \frac{500 \cdot 100}{25} = 2\ 000.$$

Odpověď: Původní cena telefonu činila **2 000 Kč**.

CVIČENÍ 1.1

?

Prodejní cena telefonu činila 2 000 Kč. O kolik procent zlevnil, když jeho současná cena činí 1 500 Kč?

1.1.1 Procento versus procentní bod

Procento představuje podíl či změnu vynásobené 100. Nicméně **procentní bod** je rozdíl mezi dvěma hodnotami v procentech. Tento rozdíl bude vysvětlen v následujícím příkladu (Šoba et al., 2013). Pokud budeme uvažovat růst úrokové míry z 9 % na 10 %, pak tato míra nevzrostla o 1 %, ale o 1 procentní bod. Proč tomu tak je? O 1 % by vzrostla v případě, že by došlo k nárůstu z 9 % na 9,09 % (o 0,09 %).

Výše uvedené bude vysvětleno ještě na dalším příkladu. Volební preference strany vzrostly z 20 % na 30 %. Vzrostly tedy o polovinu, tj. o 50 %. Tento fakt lze interpretovat také prostřednictvím procentních bodů. Tedy volební preference vzrostly o 10 procentních bodů.

V této souvislosti lze ještě zmínit pojem **bazický bod** (označovaný zkratkou *bp*, *bps*), kterým se ve finanční oblasti označuje jedna setina procentního bodu (Nacher, 2015; Rejnuš, 2014). Například změna úrokové míry z 1 % p. a. na 1,2 % znamená změnu o 20 *bp*. Nebo například při růstu úrokové míry ze 4 % na 4,45 % míra vzrostla o 45 *bp* nebo 0,45 procentního bodu.

1.2 Průměry

Zcela převažujícím typem průměru, který má časté uplatnění, je průměr aritmetický. Ve finanční matematice se však studenti často setkají s geometrickým průměrem. V následujícím textu bude věnován prostor oběma typům.

1.2.1 Aritmetický průměr

DEFINICE

Aritmetický průměr

Aritmetický průměr je součtem všech hodnot znaku vydělený počtem všech statistických jednotek souboru *n* (Hindls et al., 2002).

Ze zjištěných hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kde n je počet pozorování, lze prostý aritmetický průměr m_a vypočítat jako (1.5):

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{1.5}$$

Vážený aritmetický průměr pouze zobecňuje prostý aritmetický průměr. Používá se tam, kde hodnoty souboru n nemají stejnou váhu.

1.2.2 Geometrický průměr

DEFINICE

Geometrický průměr

Prostý geometrický průměr je definován jako *n*-tá odmocnina ze součinu hodnot těchto znaků (Hindls et al., 2002).

Geometrický průměr m_g se dle Hindlse et al. (2002) vypočítá tak, že se všechny hodnoty (jejichž počet je n) mezi sebou vynásobí a z výsledného součinu se vypočítá n-tá odmocnina – viz následující vzorec (1.6):

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}. \tag{1.6}$$

PŘÍKLAD

Jsou k dispozici údaje o počtu prodaných automobilů za směnu: 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12. Vypočítejte aritmetický a geometrický průměr.

Řešení:
Aritmetický průměr se vypočte na základě vztahu (1.5) následujícím způsobem:

$$m_a = \frac{3 + 5 + 6 + 6 + 7 + 10 + 12}{7} = \frac{49}{7} = 7.$$

Odpověď: Průměrný počet prodaných automobilů za směnu je **7**.
Geometrický průměr lze vyjádřit pomocí vztahu (1.6) následovně:

$$m_g = \sqrt[7]{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 12} = \sqrt[7]{453\,600} = 6{,}43.$$

Odpověď: Geometrický průměr je **6,43**.

V běžné ekonomické praxi je využití geometrického průměru minimální, nicméně lze se s ním setkat při výpočtu např. průměrného koeficientu růstu (Hindls et al., 2002). Také např. průměrná reálná úroková míra v daném období je geometrický průměr reálných úrokových měr v jednotlivých letech.

CVIČENÍ 1.2

Tempo růstu cen postupně vykazovalo následující hodnoty: 20 %, 10 %, –15 %, 10 % (koeficienty 1,2; 1,1; 0,85; 1,1). Vypočítejte pomocí geometrického průměru průměrný koeficient růstu.

1.3 Řady a posloupnosti

Funkce, jejímž definičním oborem D jsou buď všechna přirozená čísla N, nebo libovolná podmnožina přirozených čísel, se nazývá **posloupnost**. Posloupnost je obvykle značena malým písmenem s dolním indexem, například a_i. Zápis posloupnosti je možný prostřednictvím výčtu všech hodnot posloupnosti, např.:

$$a_k = (1, 2, 3, 4, 5)$$

nebo

$$a_n = (2, 4, 6, 8, \ldots).$$

Další možností zápisu posloupnosti je vzorec pro n-tý člen posloupnosti. Například výše uvedená množina a_n obsahovala všechna sudá čísla. To lze vzorcem (1.7) vyjádřit následovně:

$$a_n = 2n \tag{1.7}$$

Dolní index n určuje, kolikátý prvek posloupnosti je počítán. Např. šestý prvek lze spočítat dosazením do předpisu:

$$a_6 = 2 \cdot 6 = 12.$$

V následujícím textu bude definována aritmetická a geometrická posloupnost.

1.3.1 Aritmetická posloupnost a řada

Aritmetická posloupnost je jednoduchá posloupnost, kdy je mezi jednotlivými členy posloupnosti stálý rozdíl. Rozdíl, o kolik se jednotlivé prvky posloupnosti odlišují, se nazývá diference.

DEFINICE

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je posloupnost čísel, ve které je mezi každým členem a jeho následovníkem nenulový konstantní rozdíl (Radová et al., 2013).

Aritmetická posloupnost (1.8) se dá zapsat jako:

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{1.8}$$

Obecný vzorec (1.9) pro výpočet n-tého členu aritmetické posloupnosti je:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d. \tag{1.9}$$

PŘÍKLAD

Určete pátý člen posloupnosti, jestliže $a_1 = 0$ a diference $d = 2$.

Řešení:
Po dosazení zadání lze spočítat 5. člen posloupnosti (1.9):

$$a_5 = 0 + (5 - 1) \cdot 2 = 8.$$

Odpověď: Pátý člen aritmetické posloupnosti je **8**.

DEFINICE

Aritmetická řada

Součet členů aritmetické posloupnosti se označuje jako aritmetická řada.

Často je třeba zjistit součet několika prvních členů aritmetické posloupnosti. Např. prostřední prvek lze vypočítat pomocí aritmetického průměru prvního a posledního členu posloupnosti.

Výsledný vzorec (1.10) na součet n členů posloupnosti a_n by vypadal takto (Radová et al., 2013):

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}. \qquad (1.10)$$

1.3.2 Geometrická posloupnost a řada

DEFINICE

Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost je taková posloupnost, v níž **podíl** následujícího a předchozího členu je konstantní. Tento podíl se označuje jako kvocient q (Radová et al., 2013).

Následující výraz (1.11) se nazývá konečná geometrická řada (Radová et al., 2013):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad (1.11)$$

kde:
a_1 je první člen,
a_n je poslední člen,
n je počet členů,
q je kvocient, který se rovná podílu dvou po sobě jdoucích členů.

Obecně platí vzorec (1.12):

$$a_{n+1} = a_n \cdot q. \qquad (1.12)$$

DEFINICE

Geometrická řada

Součet členů geometrické posloupnosti se obvykle označuje jako geometrická řada.

Součet prvních n-členů geometrické řady lze vypočítat podle vzorce (1.13) pro $q \neq 1$ (Radová et al., 2013):

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad (1.13)$$

Poznatky o geometrické posloupnosti a řadě jsou nutné k pochopení látky věnované spoření a důchodům.

PŘÍKLAD

Určete součet prvních pěti členů posloupnosti, přičemž znáte $a_1 = 2$, $q = 3$.

Řešení:
Příklad lze řešit jednoduchým dosazením do vzorce (1.13):

$$S_5 = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 242.$$

Odpověď: Součet prvních pěti členů posloupnosti činí **242**.

Shrnutí kapitoly

- Procenta obvykle označují nějakou relativní část z celku, přičemž celek jako takový se vyjádří jako 100 %. V úlohách s % se objevují tři základní veličiny: základ *z*, počet procent *p* a procentová část *č*.
- Procento představuje podíl či změnu vynásobené 100.
- Procentní bod je rozdíl mezi dvěma hodnotami v procentech.
- Bazickým bodem *bp* se ve finanční oblasti označuje jedna setina procentního bodu.
- Aritmetický průměr je součet všech hodnot vydělený jejich počtem.
- Geometrický průměr prostý se stanoví obdobně jako aritmetický průměr prostý, pouze operace jsou o řád vyšší (místo sčítání se použije násobení, místo dělení odmocnina). Geometrický průměr může být aplikován např. při výpočtech složeného úročení (viz další kapitoly).
- Aritmetická posloupnost je druh matematické posloupnosti, kde je stálý rozdíl mezi sousedními členy.
- Geometrická posloupnost je druh matematické posloupnosti, kde každý člen (kromě prvního) je stálým násobkem předchozího členu.

Klíčová slova

- Aritmetická posloupnost a řada
- Aritmetický průměr
- Bazický bod
- Geometrická posloupnost a řada
- Geometrický průměr
- Procentní bod
- Procento a procentový počet (počet procent)

Řešení ke cvičením

Cvičení 1.1

Zboží bylo zlevněno o 25 % původní ceny.

Cvičení 1.2

Průměrný koeficient růstu je 1,054, průměrné tempo růstu činí tedy 5,4 %.

Otázky s možností výběru odpovědí

1. Vypočtěte, kolik procent je 9,705 z 64,7:
   a. 17 %,
   b. 25 %,
   c. 10 %,
   d. 15 %,
   e. 13 %.

2. V úlohách s procenty se objevují tři základní veličiny, mezi které nepatří:
   a. základ,
   b. počet procent,
   c. procentová část,
   d. procentový parametr,
   e. medián.

3. Diference aritmetické posloupnosti: 3, 6, 9, 12, 15 … činí:
   a. 6,
   b. 3,
   c. 2,
   d. 15,
   e. 4.

4. Určete součet prvních 15 členů aritmetické posloupnosti (S_{15}), platí-li $a_1 = 10$ a $d = 2$:
   a. 340,
   b. 333,
   c. 360,
   d. 250,
   e. 356.

Řešení k otázkám s možností výběru odpovědí

Správné odpovědi: 1d, 2d, 3b, 4c.

kapitola 2

Úročení