

Zpracování dat

Pavla Vrabcová

Vysokoškolská učebnice

Odborné nakladatelství Vysoké školy ekonomie a managementu

 **VŠEM**

VYSOKÁ
ŠKOLA
EKONOMIE
A MANAGEMENTU

ZPRACOVÁNÍ DAT

Zpracování dat

Seznam autorů:

doc. Ing. Pavla Vrabcová, Ph.D.

Recenzenti:

doc. RNDr. Jan Coufal, CSc.

Ing. Jan Öhm, Ph.D.

Copyright © Vysoká škola ekonomie a managementu 2024

Vydání první. Všechna práva vyhrazena

ISBN: 978-80-88502-57-9

Vysoká škola ekonomie a managementu

www.vsem.cz

Žádná část této publikace nesmí být publikována a šířena žádným způsobem a v žádné podobě bez výslovného svolení vydavatele.

Obsah

Seznam zkratk	7
Seznam obrázků a grafů	8
Seznam tabulek	9
Značky a symboly v učebním textu	12
Předmluva	13
1. KAPITOLA: KOMBINATORIKA	15
1.1 Kombinatorická pravidla	16
1.1.1 Kombinatorické pravidlo součtu	16
1.1.2 Kombinatorické pravidlo součinu	16
1.2 Kombinatorika a základní způsoby výběru	17
1.2.1 Variace k -té třídy z n prvků bez opakování	21
1.2.2 Variace k -té třídy z n prvků s opakováním	22
1.2.3 Permutace n prvků bez opakování	22
1.2.4 Permutace n prvků s opakováním	23
1.2.5 Kombinace k -té třídy z n prvků bez opakování	24
1.2.6 Počet kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním	24
1.3 Kombinatorika v MS Excel	26
2. KAPITOLA: TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI	30
2.1 Základní pojmy pravděpodobnosti	31
2.1.1 Náhodný pokus	31
2.1.2 Náhodný jev	31
2.1.3 Operace s jevy	32
2.2 Klasická definice pravděpodobnosti (Laplaceova definice pravděpodobnosti)	34
3. KAPITOLA: NÁHODNÁ VELIČINA	41
3.1 Základní terminologie	42
3.2 Distribuční funkce	43
3.3 Pravděpodobnostní funkce	46
3.4 Hustota pravděpodobnosti	49
3.5 Charakteristiky náhodné veličiny	50
3.5.1 Charakteristiky polohy	51
3.5.2 Charakteristiky variability	53
3.5.3 Charakteristiky koncentrace	55
3.6 Vybraná rozdělení náhodné veličiny	57
3.6.1 Základní typy rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny	57
3.6.2 Základní typy rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny	62
3.7 Náhodná veličina v MS Excel	68

3.7.1 Pravděpodobnostní a distribuční funkce v MS Excel	68
3.7.2 Přehled funkcí inverzních k distribuční funkci v MS Excel	69
4. KAPITOLA: ZÁKLADNÍ STATISTICKÉ POJMY	75
4.1 Základní terminologie	76
4.2 Klasifikace statistických proměnných	77
4.2.1 Nominální proměnné	78
4.2.2 Ordinální proměnné	78
4.2.3 Intervalové proměnné	78
4.2.4 Poměrové proměnné	78
4.3 Statistické šetření	79
4.3.1 Příprava statistického šetření – formulace problému	79
4.3.2 Pořizování dat	80
4.3.3 Zpracování a analýza dat	80
4.3.4 Vyhodnocení a publikování výsledků	81
5. KAPITOLA: POPISNÁ STATISTIKA	84
5.1 Statistické zpracování kategoriální proměnné	85
5.2 Zpracování numerické proměnné	87
5.3 Statistické charakteristiky numerických proměnných	96
5.3.1 Charakteristiky polohy	96
5.3.2 Charakteristiky variability	102
5.3.3 Charakteristiky koncentrace	108
5.4 Popisná statistika v MS Excel	112
5.4.1 Funkce v MS Excel pro charakteristiky polohy	114
5.4.2 Funkce v MS Excel pro charakteristiky variability	114
5.4.3 Funkce v MS Excel pro charakteristiky koncentrace	114
6. KAPITOLA: TEORIE ODHADU	119
6.1 Bodový odhad	120
6.2 Intervalový odhad	120
6.2.1 Odhad průměru v ZS	121
6.2.2 Odhad rozptylu v ZS	124
6.2.3 Odhad relativní četnosti ZS	125
6.3 Odhad rozsahu výběru	127
7. KAPITOLA: TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ	131
7.1 Základní pojmy z testování statistických hypotéz	132
7.2 Vybrané testy parametrických hypotéz	134
7.2.1 Test hypotézy o průměru	134
7.2.2 Test hypotézy o relativní četnosti	135
7.2.3 Test hypotézy o rozptylu	137
7.2.4 Test hypotézy o parametru δ exponenciálního rozdělení	139
7.2.5 Test hypotézy o shodě dvou průměrů	140
7.2.6 Test hypotézy o shodě dvou rozptylů	143
7.3 Vybrané neparametrické testy	146
7.3.1 χ^2 -test dobré shody	147

7.3.2 Kolmogorovův-Smirnovův test pro 1 výběr	147
7.3.3 χ^2 -test nezávislosti v kombinační tabulce	148
8. KAPITOLA: ÚVOD DO REGRESNÍ A KORELAČNÍ ANALÝZY	153
8.1 Základní pojmy regresní a korelační analýzy	154
8.2 Dvourozměrné rozdělení četností	155
8.3 Regresní analýza dvou proměnných	158
8.3.1 Přímková regrese	159
8.3.2 Sdružené regresní přímky	161
8.4 Intenzita závislosti a kvalita regresní funkce	162
8.4.1 Index korelace	162
8.4.2 Koeficient korelace pořadových čísel	164
8.5 Vícenásobná regrese a korelace	165
8.5.1 Vícenásobná lineární regrese	165
9. KAPITOLA: ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD	169
9.1 Základní terminologie	170
9.2 Základní charakteristiky časových řad	172
9.3 Složky časových řad	174
9.3.1 Hledání trendu	175
9.3.2 Volba vhodného modelu trendu	176
9.4 Klouzavé průměry	178
9.4.1 Prosté klouzavé průměry	179
9.4.2 Centrované klouzavé průměry	179
9.5 Zpracování časových řad užitím MS Excelu	180
10. KAPITOLA: INDEXNÍ ANALÝZA	186
10.1 Indexy	187
10.1.1 Individuální jednoduché indexy	187
10.1.2 Individuální složené indexy	189
10.1.3 Souhrnné indexy	192
10.2 Bazické a řetězové indexy	195
Glosář	200
Seznam literatury	205
Vzorový test	207
Přílohy	209
Statistické tabulky	210

Seznam zkratek

ČSÚ – Český statistický úřad

NV – náhodná veličina

ZS – základní soubor

VS – výběrový soubor

Seznam obrázků a grafů

Obrázek 1.1 Vennův diagram, množinové sjednocení	32
Obrázek 1.2 Vennův diagram, průnik jevů	33
Obrázek 1.3 Vennův diagram, průnik jevů	33
Obrázek 1.4 Vennův diagram, jev opačný	33
Obrázek 4.1 Klasifikace proměnných	78
Graf 3.1 Integrál jako plocha pod křivkou	42
Graf 3.2 Distribuční funkce diskrétní NV	44
Graf 3.3 Distribuční funkce spojitého rozdělení (normálního)	44
Graf 3.4 Graf distribuční funkce – výsledek	45
Graf 3.5 Pravděpodobnostní funkce – řešení	47
Graf 3.6 Pravděpodobnostní funkce – bodový graf	48
Graf 3.7 Pravděpodobnostní funkce – histogram	48
Graf 3.8 Hustota normálního rozdělení $N(0, 25)$	49
Graf 3.9 Příklad záporného zešikmení – koncentrace nadprůměrných hodnot je vyšší	55
Graf 3.10 Příklad kladného zešikmení – koncentrace podprůměrných hodnot je vyšší	56
Graf 3.11 Příklad na binomické rozdělení – výsledek	59
Graf 3.12 Příklad na Poissonovo rozdělení – výsledek	61
Graf 3.13 Distribuční funkce rovnoměrného rozdělení – výsledek	63
Graf 3.14 Hustota rovnoměrného rozdělení – výsledek	63
Graf 3.15 Hustota exponenciálního rozdělení – výsledek	65
Graf 3.16 Distribuční funkce exponenciálního rozdělení – výsledek	65
Graf 3.17 Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení s inflexními body	66
Graf 3.18 Distribuční funkce normálního rozdělení	66
Graf 3.19 Hustota normálního rozdělení – výsledek	67
Graf 5.1 Sloupcový graf – absolutní četnosti	87
Graf 5.2 Sloupcový graf absolutních četností prodaných bot	90
Graf 5.3 Polygon četností prodaných bot	90
Graf 5.4 Intervalové rozdělení – řešení	92
Graf 5.5 Souměrné rozdělení – normální rozdělení	108
Graf 5.6 Nesouměrné rozdělení – kladně zešikmené	109
Graf 5.7 Nesouměrné rozdělení – záporně zešikmené	109
Graf 5.8 Rozdělení s různou špičatostí	111
Graf 9.1 Spojnicový graf	181
Graf 9.2 Lineární spojnice trendu	181
Graf 9.3 Spojnice trendu klouzavého průměru	182

Seznam tabulek

Tabulka 1.1 Shrnutí – uspořádané a neuspořádané výběry	25
Tabulka 1.2 Přehled funkcí kombinatoriky v MS Excel	26
Tabulka 3.1 Tabulka rozdělení pravděpodobností – výsledky	45
Tabulka 3.2 Pravděpodobnostní funkce – zadání	46
Tabulka 3.3 Pravděpodobnostní tabulka – výsledky	47
Tabulka 3.4 Distribuční funkce – výsledek	48
Tabulka 3.5 Pravděpodobnostní funkce – zadání pro výpočet $E(X)$	51
Tabulka 3.6 Pravděpodobnostní tabulka – zadání pro výpočet kvantilů	52
Tabulka 3.7 Symetrie rozdělení vzhledem k normovanému normálnímu rozdělení	55
Tabulka 3.8 Špičatost rozdělení vzhledem ke špičatosti normovaného normálního rozdělení	56
Tabulka 3.9 Příklad náhodných pokusů	58
Tabulka 3.10 Náhodné pokusy – alternativní rozdělení pravděpodobnosti	58
Tabulka 3.11 Přehled vybraných statistických funkcí v MS Excel 2016	68
Tabulka 3.12 Ukázka vypočtených příkladů vybraných rozdělení pravděpodobnosti v MS Excel	68
Tabulka 3.13 Přehled funkcí inverzních k distribuční funkci v MS Excel 2016	69
Tabulka 5.1 Tabulka rozdělení četností (nominální proměnná)	85
Tabulka 5.2 Absolutní četnosti způsobů dopravy	86
Tabulka 5.3 Absolutní a relativní četnosti způsobů dopravy	86
Tabulka 5.4 Tabulka prostého rozdělení četnosti	88
Tabulka 5.5 Intervalové rozdělení četnosti	88
Tabulka 5.6 Tabulka prostého rozdělení četností – výsledek	89
Tabulka 5.7 Údaje o výdajích domácností – zadání	91
Tabulka 5.8 Intervalové rozdělení četnosti – výsledky	92
Tabulka 5.9 Statistické šetření – zadání příklad	93
Tabulka 5.10 Absolutní a relativní četnost kvalitativního znaku	94
Tabulka 5.11 Absolutní a relativní četnost kvantitativního znaku – počet členů	94
Tabulka 5.12 Absolutní a relativní četnost kvantitativního znaku – počet dětí	94
Tabulka 5.13 Absolutní a relativní četnost kvantitativního spojitého znaku – měsíční výdaje za jídlo	95
Tabulka 5.14 Absolutní a relativní četnost kvantitativního spojitého znaku – průměrný věk	95
Tabulka 5.15 Absolutní a relativní četnost kvantitativního spojitého znaku – měsíční příjmy	95
Tabulka 5.16 Tabulka četností pro výši kapesného	97
Tabulka 5.17 Vývoj HDP v mld. Kč v ČR v letech 2013–2019	99
Tabulka 5.18 Koeficienty růstu a tempa růstu – řešení	99
Tabulka 5.19 Hodinové rozdělení mezd mužů a žen – zadání	101
Tabulka 5.20 Hodnoty znaku dle velikosti s pořadovými čísly	102
Tabulka 5.21 Seřazené hodnoty kapesného – vzestupně	103
Tabulka 5.22 Výsledky zkoušky – zadání příkladu	104

Tabulka 5.23 Výsledky zkoušky – řešení příkladu	104
Tabulka 5.24 Údaje pro souhrnný příklad – zadání	105
Tabulka 5.25 Tabulka s pomocnými výpočty pro variační koeficient	106
Tabulka 5.26 Zadání hodnot pro souhrnný příklad popisné statistiky	106
Tabulka 5.27 Pomocné výpočty	107
Tabulka 5.28 Rozdělení příjmů	110
Tabulka 5.29 Počet certifikovaných firem ISO 14000 – zadání příkladu	112
Tabulka 5.30 Výstup z „Analýza dat“ – řešení příkladu	113
Tabulka 5.31 Pomocná tabulka pro výpočet absolutního přírůstku a koeficientu růstu	113
Tabulka 6.1 Ceny televizorů – zadání	122
Tabulka 6.2 Intervalový odhad střední hodnoty μ se spolehlivostí 1 – α při neznámém rozptylu σ^2	123
Tabulka 6.3 Přehled intervalových odhadů směrodatné odchylky se spolehlivostí 1 – α při neznámé střední hodnotě μ	124
Tabulka 6.4 Přehled intervalových odhadů rozptylu se spolehlivostí 1 – α při neznámé střední hodnotě μ	124
Tabulka 6.5 Intervalový odhad relativní četnosti π se spolehlivostí 1 – α	126
Tabulka 6.6 Odhad rozsahu výběru pro nalezení intervalového odhadu	127
Tabulka 7.1 Chyby I. a II. druhu a jejich pravděpodobnosti	132
Tabulka 7.2 Vymezení kritických oborů pro	135
Tabulka 7.3 Kritické obory (test hypotézy o shodě dvou průměrů) pro $\alpha = 0,05$	141
Tabulka 7.4 Kritické obory	143
Tabulka 7.5 Kombinační tabulka	148
Tabulka 7.6 Kombinační tabulka – pozorované četnosti	149
Tabulka 7.7 Kombinační tabulka s teoretickými četnostmi	149
Tabulka 8.1 Tabulka dvourozměrného rozdělení četností	155
Tabulka 8.2 Údaje o hmotnosti žen a mužů – zadání	156
Tabulka 8.3 Skutečné a marginální četnosti	156
Tabulka 8.4 Teoretické četnosti	157
Tabulka 8.5 Výpočet statistiky G	157
Tabulka 8.6 Údaje o váze a hmotnosti – zadání	160
Tabulka 8.7 Uspořádaná data a pomocné výpočty	160
Tabulka 8.8 Tabulka s pořadím hodnotitelů	164
Tabulka 9.1 Očištění intervalové časové řady – zadání příkladu	171
Tabulka 9.2 Očištění časové řady – řešení příkladu	171
Tabulka 9.3 Okamžiková časová řada – zadání příkladu	171
Tabulka 9.4 Okamžiková časová řada – zadání příkladu	172
Tabulka 9.5 Údaje o objemu výroby – zadání	173
Tabulka 9.6 Údaje o objemu výroby – řešení	173
Tabulka 9.7 Testy založené na jednoduchých charakteristikách časové řady	176
Tabulka 9.8 Vývoj prodaných výrobků v letech 2018–2023	177
Tabulka 9.9 Vývoj prodaných výrobků v letech 2013–2018 – řešení	177
Tabulka 9.10 Klouzavé průměry – zadání	179
Tabulka 9.11 Klouzavé průměry – řešení	180
Tabulka 10.1 Základní pojmy indexní analýzy	187
Tabulka 10.2 Cena a množství prodaného výrobku – zadání	188
Tabulka 10.3 Prodej a ceny téhož druhu zboží na 3 pobočkách – zadání	190

Tabulka 10.4 Prodej a ceny téhož druhu zboží na 3 pobočkách – pomocné výpočty	191
Tabulka 10.5 Údaje o prodeji a cenách 3 druhů zboží – zadání	193
Tabulka 10.6 Údaje o prodeji a cenách 3 druhů zboží – pomocné výpočty	194
Tabulka 10.7 Hodnoty bazického indexu	195
Tabulka 10.8 Hodnoty řetězového indexu	195
Tabulka 10.9 Vývoj kurzu dolaru vůči koruně	196
Tabulka 10.10 Vývoj kurzu dolaru vůči koruně – bazické a řetězové indexy	196
Tabulka I Řecká písmena	209
Tabulka II Vybrané kvantily normovaného normálního rozdělení	210
Tabulka III Vybrané kvantily χ^2 rozdělení s v stupni volnosti	211
Tabulka IV Vybrané kvantily χ^2 rozdělení s v stupni volnosti (pokračování)	212
Tabulka V Vybrané kvantily Studentova rozdělení s v stupni volnosti	213
Tabulka VI Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli	214
Tabulka VII Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	215
Tabulka VIII Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	216
Tabulka IX Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	217

Značky a symboly v učebním textu

Struktura distančních učebních textů je rozdílná již na první pohled, a to např. v zařazování grafických symbolů – značek.

Specifické grafické značky umístěné na okraji stránky upozorňují na definice, cvičení, příklady s postupem řešení, klíčová slova a shrnutí kapitol. Značky by měly studenta intuitivně vést tak, aby se již po krátkém seznámení s distanční učebnicí dokázal v textu rychle a snadno orientovat.

Definice



Upozorňuje na definici nebo poučku pro dané téma.

Příklad



Označuje příklad praktické aplikace učiva včetně řešení.

Otázky k procvičení a úkoly



Označuje otázky a úkoly s postupem řešení na konci kapitoly.

Klíčová slova



Upozorňuje na důležité výrazy či odborné termíny nezbytné pro orientaci v daném tématu.

Shrnutí kapitoly



Shrnutí kapitoly se zařazuje na konec dané kapitoly. Přehledně, ve strukturovaných bodech shrnuje to nejpodstatnější z předchozího textu.

Předmluva

Každý vysokoškolsky vzdělaný manažer by měl zvládnout popis datových souborů prostřednictvím souhrnných charakteristik. Dle zkušeností autorky vyvolává slovo statistika, matematika nebo pravděpodobnost u studentů určitou nechuť. Ta je však způsobena tím, že si studenti nedovedou pod jednotlivými pojmy představit nic konkrétního. Autorka vysokoškolské učebnice se zaměřila na srozumitelný výklad důležitých pojmů v dané oblasti a na objasnění všech souvislostí mezi těmito pojmy.

K rychlejší orientaci při studiu poslouží pevná struktura všech kapitol, které obsahují příklady s podrobným a názorným řešením. Snahou autorky je postupovat od věcí jednoduchých ke složitějším při zachování jednotlivých návazností. Vysokoškolská učebnice je tedy strukturována tak, aby studenti po přečtení jednotlivých kapitol testovali a prokazovali své znalosti na zadaných úlohách a zkouškových testech, případně na příkladech z praxe. Prostřednictvím klíčových slov (uvedených vždy na konci každé kapitoly) lze získat přehled o nejdůležitějších odborných termínech v daném tématu. V případě, že si student bude chtít rozšířit své vědomosti, může taktéž využít a studovat citovanou literaturu. V závěru každé kapitoly je rovněž uvedeno shrnutí nejdůležitějších poznatků. Je vhodné, aby studenti v průběhu studia pracovali s některým matematickým softwarem, např. s MS Excel, Statistica atd.

Tato vysokoškolská učebnice je členěna do dvou základních částí. V první z nich je věnován prostor kombinatorice, výpočtu pravděpodobnosti a náhodné veličině, v druhé části čtenáři proniknou do problematiky matematické statistiky. Nedílnou součástí analýz je i analýza vývoje ukazatele v čase. Poslední částí statistických metod je indexní analýza, kde bude naznačeno, jakým způsobem lze srovnávat různé ukazatele časově i prostorově.

Vysokoškolská učebnice Zpracování dat jsou rozdělena do 10 kapitol, jež na sebe věcně a logicky navazují. Ambicí vysokoškolské učebnice je rozvoj základních výpočetních postupů z oblasti popisné statistiky, základních znalostí z teorie pravděpodobnosti, rozvoj znalostí při sběru dat, jejich zpracování a elementární analýze při jejich vyhodnocování především v oblasti kvantitativních dat. Naopak si neklade za cíl rozvíjet tuto vědní disciplínu.

Studenti se seznámí s možnostmi, jak vhodným způsobem vybrat charakteristiky vhodné pro analýzu dat podle jejich povahy. Vysokoškolská učebnice poskytne čtenářům dostatečný teoretický základ pro studium pokročilých metod matematické statistiky. Důraz je kladen taktéž na upevnění početních dovedností.

Vzhledem k tomu, že autorka vysokoškolské učebnice používá ve výkladu základní matematické pojmy (např. integrál, derivace...), je nutné základní principy matematiky dopředu pečlivě nastudovat, např. využít studijní text VŠEM: Logika a matematika pro ekonomy (od autorů Coufal, Línek) nebo např. vysokoškolskou učebnici VŠEM: Logika a logické myšlení (autoři Hora, Křivánek).

Po prostudování vysokoškolské učebnice Zpracování dat v budou studenti mimo jiné:

- rozeznávat a definovat základní pojmy teorie pravděpodobnosti a náhodné veličiny,
- rozeznávat a definovat základní pojmy matematické statistiky,
- chápat principy testování hypotéz, indexní analýzy a analýzy časových řad,
- schopni aplikovat základní teoretické poznatky z oblasti pravděpodobnosti a statistiky,
- schopni využívat elementárních postupů teorie pravděpodobnosti a statistiky.

Závěrem by autorka ráda podotkla, že uvítá jakékoli připomínky, poznámky a názory čtenářů na vysokoškolskou učebnici, např. e-mailem pavla.vrabcova@vsem.cz

Autorka děkuje za recenzi a cenné připomínky doc. RNDr. Janu Coufalovi, CSc., Mgr. Ing. Jiřímu Tobíškovi a Ing. Janu Ůhmovi, Ph.D. V neposlední řadě také Mgr. Ing. Janu Vrabcovi za odborné konzultace.

1

kapitola

Kombinatorika

1. kapitola

Kombinatorika

Úvod

Při řešení mnoha praktických úloh se lze setkat s příklady, ve kterých se utváří skupiny z prvků nějaké konečné množiny. Řešením těchto úloh se zabývá kombinatorika. Zájem o kombinatoriku podnítily mimo jiné hazardní hry, například hra v kostky. Lze konstatovat, že kombinatorika je obor matematiky, který se zabývá uspořádáním daných prvků podle stanovených pravidel do určitých skupin.

Při výuce na střední škole se někteří studenti jistě seznámili se základy kombinatoriky. Přesto budou objasněny základní pojmy v této oblasti a dále se prohloubí znalosti po nastudování této kapitoly. Bude připomenut význam termínů používaných v kombinatorice a počítání s faktoriály a kombinačními čísly.

Po zvládnutí kapitoly 1 bude student připraven na řešení úloh z teorie pravděpodobnosti a na studium matematické statistiky. Kapitola požaduje mimo jiné standardně rozvinuté logické myšlení a respektování určitých pravidel u výběru skupin ze základní množiny. Základy kombinatoriky nejsou náročné z hlediska teoretických znalostí, proto bude kapitola 1 zaměřena spíše na logické úlohy.

Cíle kapitoly

- Vysvětlit základní principy kombinatorických pravidel;
- Vysvětlit základní kombinatorické výběry;
- Definovat a na příkladech vysvětlit faktoriál a kombinační číslo;
- Objasnit a aplikovat pojmy variace, permutace, kombinace.

1.1

Kombinatorická pravidla

Mezi základní kombinatorická pravidla patří kombinatorické pravidlo součtu a kombinatorické pravidlo součinu (Briš, 2011).

1.1.1 Kombinatorické pravidlo součtu

Kombinatorické pravidlo součtu je v praktickém životě užíváno, aniž bychom si to uvědomovali.

DEFINICE**Kombinatorické pravidlo součtu**

Kombinatorické pravidlo součtu zní následovně (Briš, 2011): Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní (žádný prvek není ve dvou množinách, množiny mají prázdné průniky), pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

V matematickém oboru se může také kombinatorické pravidlo součtu nazývat jako adiční princip. Princip lze vysvětlit na jednoduchém příkladu.

Pokud existuje a způsobů, jak něco udělat a b způsobů, jak dělat něco zcela jiného (nemožno dělat obojí ve stejném čase), pak existuje $a + b$ způsobů, jak vybrat některou činnost.

Výše uvedené bude ukázáno na jednoduchém příkladu.

**PŘÍKLAD**

Školu navštěvuje 28 studentů, 9 z nich jezdí do školy autem a 3 MHD. Kolik studentů dochází do školy pěšky, jestliže nikdo nepoužívá na cestě do školy jiný dopravní prostředek?

Řešení:

Počet studentů, kteří chodí do školy pěšky, označíme x . Potom platí:

$$\begin{aligned} 28 &= 9 + 3 + x. \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Odpověď: Výše uvedená úloha je jednoduchým příkladem kombinatorického pravidla součtu, do školy dochází pěšky 16 studentů.

1.1.2 Kombinatorické pravidlo součinu

Kombinatorické pravidlo součinu je taktéž využíváno v běžném životě. Počet možností, kterými se získá výsledek, lze vypočítat jako součin možností výběru z jednotlivých množin (Bílková et al., 2009). A to kvůli tomu, že k jednomu výběru z libovolné množiny můžeme kombinovat všechny možnosti výběru z ostatních množin. Viz následující definice a příklad.

DEFINICE**Kombinatorické pravidlo součinu**

Kombinatorické pravidlo součinu zní následovně (Briš, 2011): Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

 PŘÍKLAD

Ve studijní skupině je 17 žen a 13 mužů. Kolik dvojic (žena-muž) je možné ze studentů sestavit?

Řešení:

Vybíráme ze 17 žen, tzn. že existuje 17 možností, jak vybrat ženu. Ať vybereme jakoukoliv ženu, tvoříme pár s libovolným mužem, tzn. že existuje 13 možností, jak vybrat muže pro už vybranou ženu. Celkový počet možností je tedy dle výše uvedené definice:

$$17 \cdot 13 = 221.$$

Odpověď: Je možné sestavit celkem 221 dvojic.

1.2

Kombinatorika a základní způsoby výběru

DEFINICE

Kombinatorika

Kombinatorika dle Otipky et al. (2008) zkoumá skupiny (podmnožiny) prvků vybraných ze základní množiny.

Základním pojmem v kombinatorice je pojem (k -prvková) skupina (nebo také k -tice prvků), kde k je přirozené číslo (N). Jestliže v k -tici záleží na pořadí prvků, hovoří se o uspořádaných k -ticích. Jestliže na pořadí prvků v k -tici nezáleží, mluvíme o neuspořádaných k -ticích.

Dále je nutné rozlišit, jestli se prvky v k -tici mohou opakovat. Pokud se každý prvek může v k -tici vyskytnout nejvýše jednou, hovoří se o skupinách **bez opakování**. Naopak, jestliže se může libovolný prvek v k -tici vyskytnout vícekrát (nejvýše k -krát), mluvíme o skupinách **s opakováním** (Litschmanová, 2011).

Ještě než budou představeny 3 základní způsoby výběru, je nutno připomenout důležité matematické pojmy, které budou při výpočtech používány, a to faktoriál ($n!$) a kombinační číslo $\binom{n}{k}$.

DEFINICE

Faktoriál

Pro každé **přirozené číslo** n definujeme (Neubauer et al., 2016):

$$n! = n \cdot (n - 1)! \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \text{ kde } 0! = 1.$$

Číslo $n!$ čteme jako „ n faktoriál“.

Pokud uvažujeme faktoriál určitého čísla, je možné jej rozepsat na součin všech jeho členů:

$$0! = 1,$$

$$1! = 1,$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800.$$

Faktoriál je možné vypočítat na kalkulačce prostřednictvím funkce „X!“. Definiční obor musíme stanovovat pokaždé (faktoriál záporného čísla neexistuje). S faktoriály se často počítá ve zlomcích, proto je tedy nezbytné naučit se faktoriály zjednodušovat. Např. $5!$ je rovný součinu přirozených čísel: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Přitom lze napsat, že $5!$ jde např. zjednodušit následovně: $5! = 5 \cdot 4!$, viz následující příklad.

PŘÍKLAD

Vypočítejte $\frac{15!}{13!}$

Řešení:

U prvního příkladu je zřejmé, že můžeme vypočítat každý faktoriál zvlášť a poté zlomek zkrátit. Výraz $\frac{15!}{13!}$ lze zjednodušit následovně:

$$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210.$$

Odpověď: Uvedený výraz je po vykrácení $13!$ roven 210.

PŘÍKLAD

Zjednodušte výraz v N :

$$\frac{(n+4)!}{(n+1)!}$$

Definiční obor:

$$D(f) = \{n; n \geq -1; n \in N\}.$$

Řešení:

Výraz $\frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ lze zjednodušit následovně:

$$\begin{aligned} \frac{(n+4)!}{(n+1)!} &= \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!}{(n+1)!} = (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \\ &= n^3 + 9n^2 + 26n + 24. \end{aligned}$$

Odpověď: Zjednodušíme faktoriály tak, aby mohly být vykráceny, výraz se rovná

$$n^3 + 9n^2 + 26n + 24.$$

PŘÍKLAD

Řešte v N následující rovnici:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 12n + 14.$$

Definiční obor:

$$D(f) = \{n; n \geq -1; n \in N\}.$$

Řešení:

Výraz na levé straně je nutno zjednodušit a „zbavit“ jej faktoriálu:

$$\begin{aligned} \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!}{(n+1)!} &= 12n + 14. \\ (n+3) \cdot (n+2) &= 12n + 14. \\ n^2 + 5n + 6 &= 12n + 14. \\ n^2 - 7n - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Kvadratickou rovnici je možné vyřešit prostřednictvím diskriminantu D .

$$D = b^2 - 4ac.$$

$$D = 49 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 81.$$

$$n = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}.$$

$$n_1 = \frac{7+9}{2} = 8.$$

$$n_2 = \frac{7-9}{2} = -1 \dots \text{nevyhovuje } N.$$

Odpověď: Pro uvedenou rovnici platí $n = 8$, $K = \{8\}$.

CVIČENÍ 1.1



Zjednodušte následující příklady a uveďte definiční obor:

$$\begin{aligned} & \frac{(n+2)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+2)!} \\ & \frac{n!}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \\ & \frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} - \frac{(n^2-4)}{(n+2)!} \end{aligned}$$

DEFINICE



Kombinační číslo

Pro všechna celá nezáporná čísla n , k , kde $k \leq n$, definujeme kombinační číslo $\binom{n}{k}$. Čteme n nad k .

Pro $\binom{n}{k}$ platí následující vztah (1.1) (Bauer, 2015):

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{pro } n \geq k \geq 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Dále platí rovnost (1.2):

$$\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \quad (1.2)$$

PŘÍKLAD

Vypočítejte výraz:

$$\binom{26}{2}.$$

Řešení:

Výraz lze zjednodušit následovně dle vztahu (1.1):

$$\binom{26}{2} = \frac{26!}{2!(26-2)!} = \frac{26!}{2! \cdot 24!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24!}{2! \cdot 24!} = \frac{26 \cdot 25}{2 \cdot 1} = 325.$$

Odpověď: Uvedený výraz je roven 325.

 PŘÍKLAD

Vyřešte následující rovnici v N :

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 4.$$

Řešení:

Rovnici je nutno zjednodušit dle vztahu (1.1):

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{2!(n-1-2)!} = 4.$$

Zjednodušíme rovnici následovně:

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2!(n-3)!} = 4.$$

Upravíme a vykrátíme zlomek následovně:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} &= 4. \\ \frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^2 - 3n + 2}{2} &= 4. \end{aligned}$$

Vynásobíme celou rovnici číslem 2:

$$n^2 - n + n^2 - 3n + 2 = 8.$$

Odečteme 8 a získáme kvadratickou rovnici:

$$2n^2 - 4n - 6 = 0.$$

Rovnici lze vydělit číslem 2:

$$n^2 - 2n - 3 = 0.$$

Kvadratickou rovnici lze vypočítat prostřednictvím diskriminantu (viz výše) nebo rozkladem na součin:

$$(n-3)(n+1) = 0.$$

$$n_1 = 3.$$

$$n_2 = -1, \text{ nevyhovuje } N.$$

Odpověď: Rovnice má jediné řešení, a to $n = 3$.

CVIČENÍ 1.2



Vypočítejte následující příklad:

$$\binom{10}{3} + \binom{7}{2}.$$